



Department of Mathematics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava

2nd International Conference
APLIMAT 2003

POHYB HMOTNÉHO BODU PO PLOŠE V GRAVITAČNÍM POLI

ZACHARIÁŠ Svatopluk, (ČR), VELICHOVÁ Daniela, (SK)

Abstrakt. Príspevok prezentuje netypické riešenie jednej zaujímavej úlohy fyzikálnej olympiády pre stredoškolských študentov v Českej republike. Uvedené riešenie používa aparát diferenciálnej geometrie a presahuje svojou podstatou rámec stredoškolskej matematiky. Umožňuje však komplexnejší pohľad na riešený problém a realizáciu výpočtu využitím systému Mathematica.

MOVEMENT OF A MASS POINT ON A SURFACE IN THE GRAVITY FIELD

Abstract. The paper presents a non-standard solution of one interesting problem that was sold on the Physical Olympiade for secondary school students in Czech republic. Presented solution is an application of the differential geometry and in its base it is beyond the scope of the secondary school mathematics. Yet, it enables a complex view of the entire problem and the calculations can be realised using the software Mathematica.

1 Úvod

Předpokládejme, že intenzitu gravitačního pole lze popsat v kartézských souřadnicích (x, y, z) prostoru 3D v soustavě SI **nenulovým** vektorem

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z)).$$

Orientovatelná plocha je dána v parametrickém tvaru

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Normála plochy je

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} = \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v, \quad |\mathbf{n}|^2 = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2.$$

Připustíme jen **nenulovou normálu** plochy, její orientaci lokálně upravme tak, aby $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} > 0$. To znamená, že bod se pohybuje po *rubu* plochy ($-\mathbf{n}$) a nepadne mimo plochu. Příklad $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ působí potíže při numerickém řešení soustavy diferenciálních rovnic.

Dráha na ploše \mathbf{p} , hodograf vektorové funkce $\mathbf{s}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, je popsána dvěma zatím neznámými funkcemi $u(t), v(t)$. Pokud $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} > 0$, vektor zrychlení

$$\mathbf{a} = \mathbf{s}'' = \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2}$$

dostaneme tak, že vektor \mathbf{g} zmenšíme o normálovou složku, ta je rušena pevností plochy

$$\mathbf{s}'' = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \mathbf{g} - \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{g} - \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}.$$

Neznámé funkce $u(t), v(t)$ budeme hledat numerickým řešením tří (závislých) nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Doplníme počáteční podmínky, kde se nachází bod v okamžiku $t = 0$ a jakou má v tomto okamžiku rychlost:

$$\mathbf{s}'' = \mathbf{g} - \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}, \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} > 0, \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{s}'(0) = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Nakonec vykreslíme dráhu $\mathbf{s}(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$.

V důsledku nevhodné parametrizace plochy, může být normála nulový vektor (např. u klasických sférických souřadnic v pólech). To významně zpomalí, či zastaví, numerické řešení diferenciálních rovnic, pokud se dráha pohybujícího se bodu do této singularity dostane.

V následujících příkladech je

$$\mathbf{g} = (0, 0, -9.81). \quad (2)$$

Pokud (alespoň lokálně) existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi bodem plochy (p_1, p_2, p_3) a jeho půdorysem $(p_1, p_2, 0)$, vybereme pro numerické řešení první dvě rovnice ($s''_1 = \dots, s''_2 = \dots$) soustavy (1).

2 Příklady

Příklad 1 (z Fyzikální Olympiády)

Velký tobogan v zábavním parku má poloměr $r = 10$ m, tvoří ho žlab o poloměru $\rho = 35$ cm. Po jedné otočce klesne dráha o $q = 5$ m. Jaký pohyb koná malé tělíčko pohybující se bez tření? (1)

Řešení přesahuje rámec středoškolských znalostí.

Plochu toboganu považujeme za část Archimédovy serpentiny (pro názornost je připojen ještě obrázek s jinými parametry)

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{k}(u) + \rho (\mathbf{h} \cos v + \mathbf{b} \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi,$$

$$\mathbf{k}(u) = (r \cos u, r \sin u, u q / (2\pi)), \quad \mathbf{h} = \mathbf{k}'' / |\mathbf{k}''|, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{k}' / |\mathbf{k}'|.$$

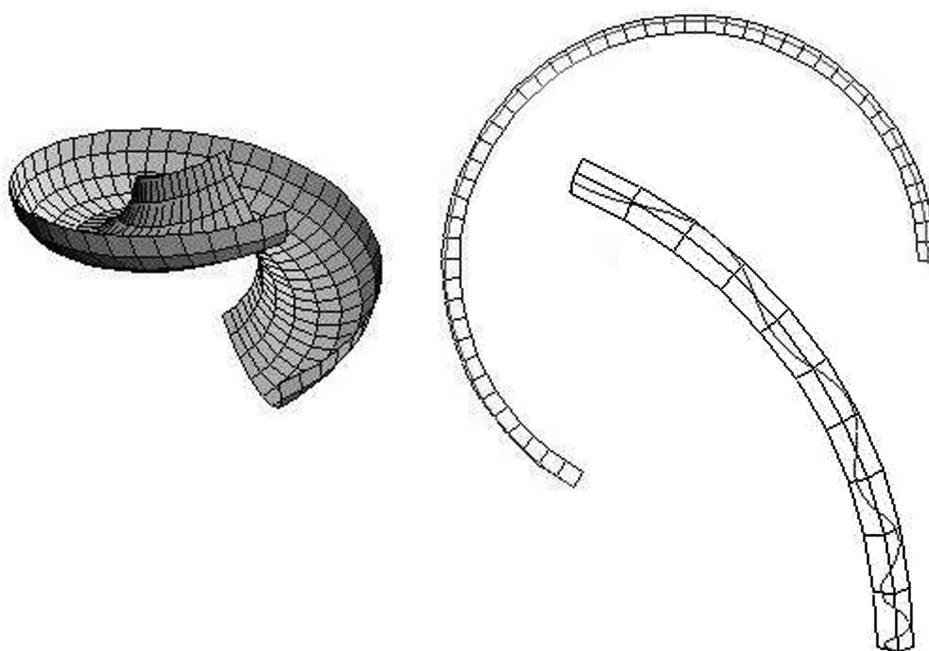
Uvažujme gravitační pole (2). Výpočet drah $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{s}'(0) = \mathbf{0}$, byl proveden v systému Mathematica pro dvojí různé počáteční podmínky

$$u(0) = 2\pi, v(0) = \pi/2, u'(0) = v'(0) = 0,$$

$$u(0) = 2\pi, v(0) = 3\pi/4, u'(0) = v'(0) = 0.$$

Numerické řešení bylo nastaveno na 500 kroků. Pokud se pohybující se bod dostává do lokálně svislé části plochy, může zvyšování počtu kroků vést k prakticky nulovému kroku a numerický výpočet se zastaví.

Vykreslení dráhy ve žlabu bylo realizováno při perspektivním pohledu zdola proto, aby dráhu nezakrývaly *destičky*, ze kterých je plocha modelována v systému Mathematica.



Příklad 2

Popište dráhu matematického kyvadla délky l zavěšeného v počátku $(0, 0, 0)$ s velkým rozkyvem $0.08 < \beta \leq \pi/2$ v gravitačním poli (2). Při vychýlení $\mathbf{p}_0 = (-l \sin \beta, 0, -l \cos \beta)$ je hmotnému bodu udělena rychlost $\mathbf{w} = (0, w, 0)$.

Řešení

Pohyb hmotného bodu kyvadla nahradíme pohybem hmotného bodu v polokouli

$$\mathbf{p}(u, v) = (l \cos u \cos v, l \sin u \cos v, l \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq v \leq 0,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}.$$

V okamžiku $t = 0$ bude $u(0) = \pi$, $v(0) = \beta - \pi/2$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $u'(0)$ a $v'(0)$ určíme z rovnic

$$\mathbf{w} = \left. \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{p}_u u'(0) + \mathbf{p}_v v'(0).$$

Protože v důsledku ortogonální parametrizace je $\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0$, dostaneme

$$u'(0) = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{p}_u}{|\mathbf{p}_u|^2}, \quad v'(0) = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_v|^2}.$$

Pokud $w \neq 0$, nebude dráha směřovat do singulárního bodu $(0, 0, -l)$ a numerické řešení rovnic (1) bude bez problémů.

Když $w = 0$, bude se bod pohybovat v rovině (x, z) a model 3D je zbytečný. Místo plochy uvažujeme křivku

$$\mathbf{p}(v) = l(\cos v, \sin v), \quad \pi \leq v \leq 2\pi, \quad \mathbf{s}(t) = \mathbf{p}(v(t)), \quad v(0) = 3\pi/2 - \beta, \quad v'(0) = 0,$$

$$\mathbf{g} = (0, -9.81), \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}$$

a ze soustavy (1) dvou diferenciálních rovnic druhého řádu vyberme jen první rovnici pro hledanou funkci $v(t)$. Za numerickým řešením diferenciální rovnice se skrývají výpočty eliptických integrálů, ke kterým vede řešení kyvadla s velkým rozkyvem.

3 Závěr

Dva řešené příklady, uvedené v příspěvku, sú len zlomkom všetkých možných alternatívnych problémov, ktoré navrhnutá metóda riešenia poskytuje. Využitie prostriedkov diferenciálnej geometrie pri hľadaní riešenia fyzikálneho problému dokumentuje možnosti vzájomného dopĺňania sa týchto prírodných vied opisujúcich realitu rôznymi prostriedkami, geometrická interpretácia problematiky vnáša do riešenia názornosť. Aplikácia matematického softvéru umožňuje najšť riešenie aj pri zložitých a časovo náročných výpočtoch, akými zvyčajne riešenia diferenciálnych rovníc bývajú, zvlášť ak popisujú fyzikálne problémy modelujúce realitu.

Literatúra

- [1] KS MFO 2002, 2-2, *ivo.volf@uhk.cz*.

Kontaktná adresa

RNDr. Svatopluk Zachariáš, CSc., ul. Družby 17, 312 04 Plzeň, *zakarias@volny.cz*

doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., Katedra matematiky Sjf STU v Bratislave, nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava, *velichov@sjf.stuba.sk*